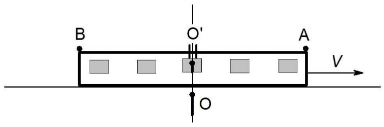
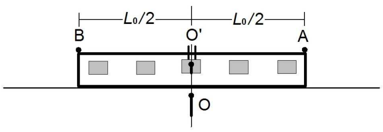
3α. ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – «ΠΑΡΑΔΟΞΑ» – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Παράδειγμα: Το τρένο του Άινστάιν



Ένα τρένο κινείται ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή Ο με σταθερή ταχύτητα *V*. Στο μέσο ακριβώς του τρένου και ακίνητος ως προς αυτό, βρίσκεται ένας παρατηρητής Ο΄.
Στα δύο άκρα του τρένου βρίσκονται δύο πηγές φωτός, Α και Β. Έστω ότι τη χρονική στιγμή που ο Ο΄ περνά μπροστά από τον Ο δύο παλμοί φωτός φτάνουν ταυτόχρονα στους δύο παρατηρητές, έχοντας εκπεμφθεί, αντιστοίχως, ένας από κάθε μια από τις πηγές Α και Β. Θα θεωρήσουμε ότι το τρένο κινείται με ταχύτητα μικρότερη από αυτήν του φωτός στο κενό.

Με τους παρατηρητές Ο και Ο΄ θα συνδέσουμε τα αδρανειακά συστήματα S και S΄, μέσα στα οποία οι Ο και Ο΄, αντίστοιχα, είναι ακίνητοι. Τα δύο συστήματα αναφοράς συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$. Θα εξετάζουμε τα συμβάντα πρώτα στο σύστημα αναφοράς S΄ του παρατηρητή Ο΄, που βρίσκεται πάνω στο τρένο και στο μέσο του.



Αν το μήκος ηρεμίας του τρένου είναι L_0 και οι δύο πηγές απέχουν ίση απόσταση $L_0/2$ από τον Ο΄, το φως και από τις δύο πηγές χρειάστηκε χρόνο $L_0/2c$ για να φτάσει στον Ο΄. Αφού οι δύο παλμοί φτάνουν στο σημείο $x' = 0$ τη χρονική στιγμή $t' = 0$, τότε τα δύο συμβάντα της εκπομπής των παλμών από τις πηγές Α και Β έχουν τις συντεταγμένες:

Παλμός Α: $x'_{\mathrm{A}} = \dfrac{L_0}{2}$, $t'_{\mathrm{A}} = -\dfrac{L_0}{2c}$. Παλμός Β: $x'_{\mathrm{B}} = -\dfrac{L_0}{2}$, $t'_{\mathrm{B}} = -\dfrac{L_0}{2c}$.

Στο σύστημα αναφοράς S του παρατηρητή O, που βρίσκεται πάνω στην αποβάθρα, οι συντεταγμένες των δύο συμβάντων βρίσκονται με χρήση του μετασχηματισμού του Λόρεντς από το σύστημα S΄ στο S. Βρίσκουμε

Παλμός A: $$x_A = \gamma\left(x'_A + \beta c t'_A\right) = \gamma\left(\frac{L_0}{2} - \beta\frac{L_0}{2}\right) = \frac{L_0}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \; ,$$

$$t_A = \gamma\left(t'_A + (\beta/c)x'_A\right) = \gamma\left(-\frac{L_0}{2c} + \frac{\beta}{c}\frac{L_0}{2}\right) = -\frac{L_0}{2c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \; .$$

Παλμός B: $$x_B = \gamma\left(x'_B + \beta c t'_B\right) = \gamma\left(-\frac{L_0}{2} - \beta\frac{L_0}{2}\right) = -\frac{L_0}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \; ,$$

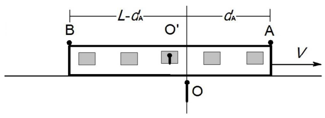
$$t_B = \gamma\left(t'_B + (\beta/c)x'_B\right) = \gamma\left(-\frac{L_0}{2c} - \frac{\beta}{c}\frac{L_0}{2}\right) = -\frac{L_0}{2c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \; .$$

Παρατηρούμε ότι είναι $x_A/t_A = -c$ και $x_B/t_B = c$, όπως αναμένεται.

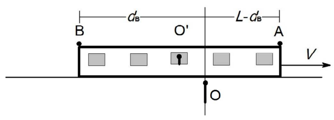
Στο σχήμα φαίνονται οι θέσεις του τρένου τις στιγμές της εκπομπής των δύο παλμών. Προφανώς, λόγω συστολής, το μήκος του τρένου για τον παρατηρητή O θα είναι $L = L_0/\gamma$. Όταν εκπέμπεται ο παλμός από την πηγή A, αυτή απέχει από τον παρατηρητή O απόσταση

$$d_A = x_A = \frac{L_0}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \; ,$$

η οποία είναι μικρότερη από $L_0/2$.



Όταν εκπέμπεται ο παλμός από την πηγή B, αυτή απέχει από τον παρατηρητή O απόσταση ,



$$L - d_B = |x_B| = \frac{L_0}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

η οποία είναι μεγαλύτερη από $L_0/2$.

Παρατηρούμε ότι είναι $d_{\mathrm{B}} > d_{\mathrm{A}}$.
Η διαφορά ανάμεσα στους χρόνους εκπομπής των δύο παλμών είναι

$$\Delta t = t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}} = -\frac{L_0}{2c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + \frac{L_0}{2c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = -\frac{\beta L_0 / c}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\gamma \frac{V L_0}{c^2} \quad ,$$

με τον παλμό B να εκπέμπεται στο σύστημα του παρατηρητή O νωρίτερα από τον παλμό A.

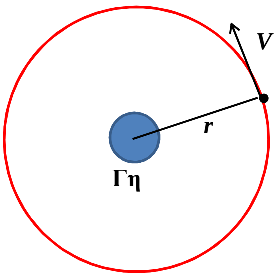
Με ● σημειώνονται η αρχή και το τέλος των ασκήσεων και των παραδειγμάτων που δεν υπάρχουν στις σημειώσεις του μαθήματος

● **Διόρθωση στη σελίδα 57 των Σημειώσεων**: Το κείμενο που αρχίζει στη δεύτερη γραμμή με τη φράση «Την ίδια στιγμή …» και τελειώνει στο τέλος του εδαφίου, να αντικατασταθεί με το πιο πάνω κείμενο. ●

● **Παράδειγμα: Διόρθωση στο GPS λόγω Ε.Θ.Σ.**

Έστω δορυφόρος που κινείται σε κυκλική τροχιά σε απόσταση από το κέντρο της Γης $r = 26\,600$ km. Θα είναι $\frac{MG}{r^2} = \omega^2 r$ και επομένως

$$\omega = \sqrt{\frac{MG}{r^3}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{MG}} = 11{,}6 \text{ h}$$



Η ταχύτητα του δορυφόρου είναι

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{MG}{r}} = 3868 \text{ m/s}$$

στην οποία αντιστοιχούν:

$$\beta = 0{,}000\,129 \qquad \gamma = 1{,}000\,000\,000\,083$$

Το ρολόι στον δορυφόρο θα καθυστερήσει ως προς άλλο στη Γη, σε μια μέρα, κατά χρόνο $\Delta t = 24 \times 60 \times 60 \times 8{,}3 \times 10^{-11} = 7{,}2 \times 10^{-6}$ s = 7,2 μs
Σε αυτό το χρονικό διάστημα το φως διανύει απόσταση

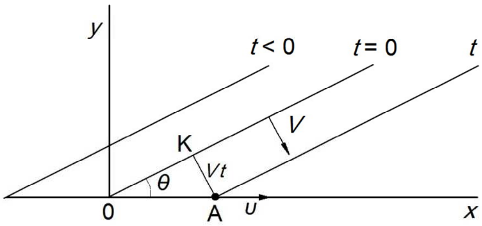
$$\Delta s = c\Delta t = 2151 \text{ m} = 2 \text{ km}$$ ●

Παράδειγμα: «Ταχύτητες» μεγαλύτερες αυτής του φωτός

1. Σημείο επαφής ενός κύματος με την παραλία

Στην παραλία 0*x* προσπίπτει κύμα κινούμενο με ταχύτητα *V* και υπό γωνία *θ* ως προς αυτήν. Το σημείο επαφής του κύματος με την παραλία είναι στο *x* = 0 όταν είναι *t* = 0 και στο σημείο Α στο χρόνο *t*. Επειδή είναι

$$x_{\mathrm{A}} = (\mathrm{OA}) = \frac{(\mathrm{KA})}{\sin\theta} = \frac{Vt}{\sin\theta}$$



η ταχύτητα μετατόπισης του σημείου Α κατά μήκος της παραλίας είναι:

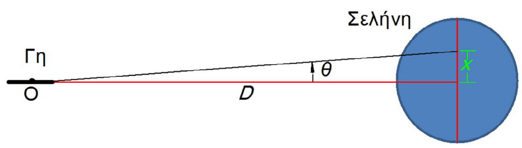
$$\upsilon = \frac{x_{\mathrm{A}}}{t} = \frac{V}{\sin\theta}$$

η οποία για $\sin\theta < V/c$ δίνει $\upsilon > c$. ***Παραβιάζεται η Ε.Θ.Σ.;***

2. Δέσμη φωτός από λέηζερ στην επιφάνεια της Σελήνης

Δέσμη φωτός από λέηζερ εκπέμπεται από τη Γη προς την επιφάνεια της Σελήνης, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $D = 385\,000$ km.

Αν η δέσμη περιστραφεί κατά μικρή γωνία *θ*, η κηλίδα φωτός στην επιφένεια της



Σελήνης θα μετατοπιστεί κατά απόσταση $x = D\theta$. Η ταχύτητα μετατόπισης της κηλίδας πάνω στην επιφάνεια της Σελήνης θα είναι, επομένως, $\upsilon = \frac{dx}{dt} = D\frac{d\theta}{dt}$. Αν περιστρέφουμε το λέηζερ γύρω από τον άξονα Ο με ρυθμό *r* περιστροφές ανά μονάδα χρόνου, θα είναι $d\theta / dt = 2\pi r$. Η ταχύτητα της κηλίδας θα είναι $\upsilon = 2\pi r D$.

Για $r = 0{,}124$ περιστροφές /s (περίοδος $T = 8$ s) είναι $\upsilon = c$.

Για $r > 0{,}124$ r.p.s. ($T > 8$ s) θα είναι $\upsilon > c$. ***Παραβιάζεται η Ε.Θ.Σ.;***

Άσκηση 3.10

Η διάμετρος του Γαλαξία μας είναι 100 000 έτη φωτός. Με ποια σταθερή ταχύτητα ως προς τον Γαλαξία θα πρέπει να κινείται ένας αστροναύτης για να διασχίσει τον Γαλαξία μας με ένα ταξίδι που για αυτόν θα διαρκέσει 50 χρόνια;

Έστω ότι το διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα V ως προς τη Γη. Το ταξίδι θα διαρκέσει χρόνο $t = D / V$ για έναν παρατηρητή στη Γη, όπου D είναι η διάμετρος του Γαλαξία. Για κάποιον μέσα στο διαστημόπλοιο, το ταξίδι θα διαρκέσει χρόνο $t' = D / V\gamma$. Έτσι,

$$ct' = \frac{D}{\beta\gamma} \qquad \beta\gamma = \frac{D}{ct'} \qquad \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \left(\frac{D}{ct'}\right)^2 \qquad \frac{1}{\beta^2} = 1 + \left(\frac{ct'}{D}\right)^2 \qquad \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{ct'}{D}\right)^2$$

$$\beta \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{ct'}{D}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{50}{100\,000}\right)^2 \qquad \beta = 1 - 1,25\times10^{-7} = 0,999\,999\,875$$

Με σταθερή επιτάχυνση ίση με $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$, για να φτάσει αυτήν την ταχύτητα, ουσιαστικά c, θα χρειαστεί χρόνο $T = c / g = 3,06\times10^7\ \mathrm{s} = 0,97\ \mathrm{y}$.

Άσκηση 3.13

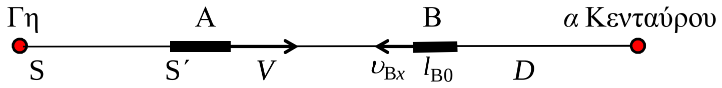
Ένα διαστημόπλοιο, Α, αναχωρεί από τη Γη και κατευθύνεται προς το άστρο α του Κενταύρου, με σταθερή ταχύτητα. Η απόσταση του άστρου από τη Γη είναι $D = 4$ έτη φωτός. (1 έτος φωτός = η απόσταση που διανύει το φως σε ένα έτος $= 1\ \ell.\mathrm{y.} = 9,45\times10^{15}\ \mathrm{m}$). Θεωρήστε τη Γη ως σύστημα αναφοράς S και το διαστημόπλοιο ως σύστημα αναφοράς S΄, το οποίο κινείται ως προς το S με ταχύτητα V, απομακρυνόμενο από τη Γη.

(α) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τη Γη, V, ώστε για έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο το ταξίδι αυτό να διαρκέσει $\Delta t' = 4$ έτη;

(β) Πόση είναι η διάρκεια του ταξιδιού, Δt, για έναν παρατηρητή στη Γη;

(γ) Υποθέτουμε ότι ένα δεύτερο διαστημόπλοιο Β επιστρέφει από τον α του Κενταύρου με ταχύτητα $\upsilon_{\mathrm{B}x} = -c / \sqrt{2}$ ως προς τη Γη. Ποια είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Β όπως την μετρά ο παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α;

(δ) Αν το μήκος ηρεμίας του διαστημοπλοίου Β είναι $l_{\mathrm{B}0} = 48\ \mathrm{m}$, ποιο είναι το μήκος του, l'_{B}, όπως το μετρά ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α;



(α) Η διάρκεια του ταξιδιού για τον παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο είναι: $\Delta t' = 4$ έτη.
Για τον παρατηρητή στη Γη, το ταξίδι διαρκεί: $\Delta t = D/V$.
Η σχέση ανάμεσα στους δύο χρόνους είναι: $\Delta t' = \Delta t / \gamma$.

Επομένως, $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\gamma} = \dfrac{D/V}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad V\gamma = \dfrac{D}{\Delta t'}, \qquad \beta\gamma = \dfrac{D/c}{\Delta t'}$.

Όμως, $\Delta t' = 4$ έτη και $D/c = 4$ έτη, οπότε $\beta\gamma = 1$.

Αυτό δίνει: $(\beta\gamma)^2 = \dfrac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{V}{c} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \qquad (\gamma = \sqrt{2})$.

(β) Η διάρκεια του ταξιδιού για τον παρατηρητή στη Γη θα είναι:
$\Delta t = \gamma \Delta t' = \sqrt{2} \times 4 \text{ y} = 5{,}7$ έτη.

(γ) Στο σύστημα αναφοράς S η ταχύτητα του διαστημοπλοίου B είναι $\upsilon_{\mathrm{B}x} = -c/\sqrt{2}$. Στο σύστημα αναφοράς S΄ θα είναι επομένως

$$\upsilon'_{\mathrm{B}x} = \frac{\upsilon_{\mathrm{B}x} - V}{1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}x} V}{c^2}} = \frac{-c/\sqrt{2} - c/\sqrt{2}}{1 + c^2/2c^2} = \frac{-\sqrt{2}c}{3/2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}c$$

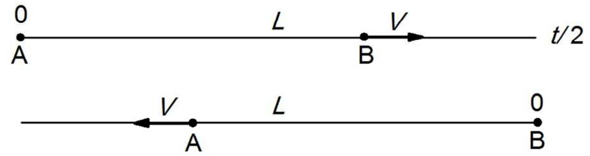
(δ) Στην ταχύτητα $\upsilon'_{\mathrm{B}x} = -\left(2\sqrt{2}/3\right)c$ που μετρά ο A για τον B, αντιστοιχεί παράγοντας Lorentz

$$\gamma'_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\upsilon'_{\mathrm{B}x}/c\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(2\sqrt{2}/3\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-8/9}} = 3$$

Επομένως $\quad l'_{\mathrm{B}} = \dfrac{l_{\mathrm{B}0}}{\gamma'_{\mathrm{B}}} = \dfrac{48}{3} = 16 \text{ m}$.

Το παράδοξο των διδύμων.

Ο παρατηρητής Α βλέπει τον (δίδυμο αδερφό του) Β να απομακρύνεται από αυτόν με ταχύτητα *V*. Σύμφωνα με τον Α, τα ρολόγια του Β θα πηγαίνουν πιο αργά από τα δικά του. Αν ο Β διανύσει μια απόσταση *L* σε χρόνο *t*/2, σύμφωνα με τον Α, ο χρόνος που θα μετρήσει ο Β θα είναι (*t*/2)/γ.

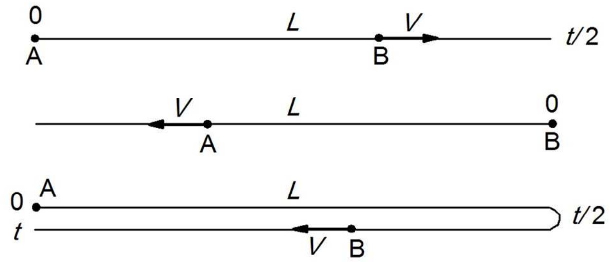


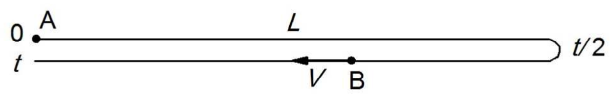
Στο σύστημα του Β, ο Α είναι που κινείται απομακρυνόμενος από αυτόν με ταχύτητα *V*. Σύμφωνα με τον Β, τα ρολόγια του Α θα πηγαίνουν πιο αργά από τα δικά του. Αν ο Α διανύσει μια απόσταση *L* σε χρόνο *t*/2, σύμφωνα με τον Β, ο χρόνος που θα μετρήσει ο Β θα είναι (*t*/2)/*γ*.

Ποιος έχει δίκιο; **Ε.Θ.Σ.: Και οι δύο.**

Τι θα συμβεί, όμως, αν ο Β, αφού διανύσει την απόσταση *L* σε χρόνο *t*/2, κάνει μεταβολή και επιστρέψει στη θέση του Α, όπου τα ρολόγια των δύο θα μπορούν να συγκριθούν; Ποιανού τα ρολόγια θα δείχνουν παρέλευση χρόνου ίσου με *t*/2 και ποιανού ίσου με (*t*/2)/*γ*;

Μήπως, αφού υπάρχει συμμετρία ανάμεσα στα δύο συστήματα τα ρολόγια και των δύο θα δείχνουν παρέλευση της ίδιας ώρας; Αυτό όμως θα παραβίαζε την Ε.Θ.Σ.





Το φαινομενικό «παράδοξο» παύει να υπάρχει όταν καταλάβουμε ότι οι δύο παρατηρητές δεν είναι ισοδύναμοι. Ο Α βρίσκεται συνεχώς σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και μπορεί να εφαρμόσει τις προβλέψεις της Ε.Θ.Σ., δηλαδή ότι το ταξίδι ολόκληρο θα διαρκέσει γι' αυτόν χρόνο t και για τον Β χρόνο t/γ. Με άλλα λόγια, όταν ο δίδυμος αδερφός του επιστρέψει, θα είναι νεώτερος από αυτόν κατά χρόνο ίσο με $t\left(1-1/\gamma\right)$.

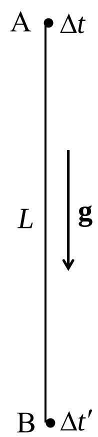
Ο Β όμως, για να επιστρέψει, θα πρέπει να επιβραδυνθεί μέχρι να μηδενίσει την ταχύτητά του ως προς τον Α, και μετά να επιταχυνθεί προς αυτόν μέχρι να φτάσει και πάλι την ταχύτητα V, με την οποία και θα επιστρέψει στον Α. Ο Β, επομένως δεν βρίσκεται συνεχώς σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και δεν μπορεί να εφαρμόσει την Ε.Θ.Σ.

Το παράδοξο εξαφανίζεται τελείως αν ο Β χρησιμοποιήσει τη *Γενική Θεωρία της Σχετικότητας* για να υπολογίσει τη διάρκεια του ταξιδιού του.

Σύμφωνα με τη Γ.Θ.Σ., αν δύο ρολόγια, Α και Β, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L και βρίσκονται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης g, μετρήσουν, αντίστοιχα, χρόνους Δt και $\Delta t'$ ανάμεσα σε δύο συμβάντα, θα είναι

$$\Delta t' \approx \left(1-\frac{gL}{c^2}\right)\Delta t$$

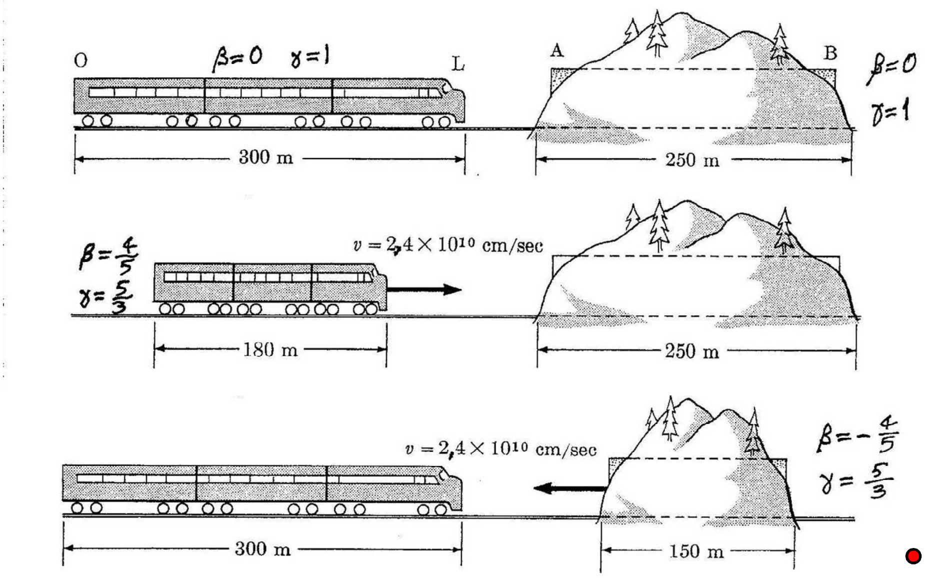
όπου τον μικρότερο χρόνο $\Delta t'$ θα τον μετρήσει ο παρατηρητής που βρίσκεται χαμηλότερα μέσα στο βαρυτικό πεδίο.



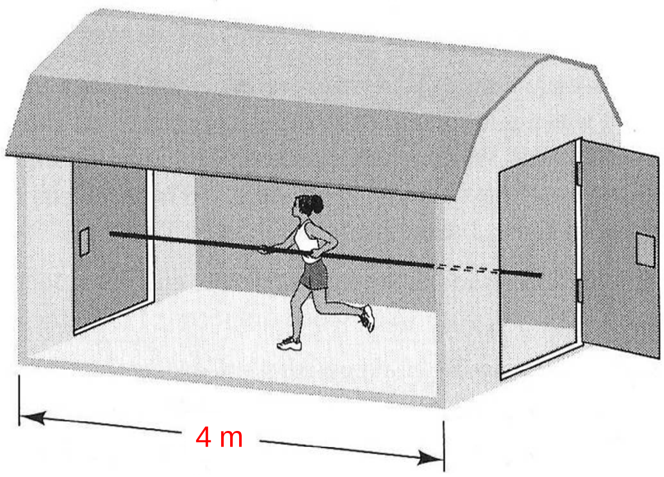
Ο Β, όταν επιταχύνεται προς τον Α με επιτάχυνση $\mathbf{a}$, θα αισθανθεί ότι βρίσκεται μέσα σε βαρυτικό πεδίο έντασης $\mathbf{g}=\mathbf{a}$. Τα ρολόγια του θα μετρούν χρόνο με βραδύτερο ρυθμό από ό,τι τα ρολόγια του Α.

Αν λάβει υπόψη του τις προβλέψεις της Γ.Θ.Σ., ο Β θα διαπιστώσει ότι πράγματι το ταξίδι του διάρκεσε γι΄ αυτόν λιγότερο χρόνο από όσο για τον Α, και ακριβώς ίσο με t/γ , όπως προβλέπει η Ε.Θ.Σ.

● Ένα σχετικιστικό παράδοξο - Το τρένο και η σήραγγα.

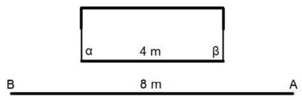


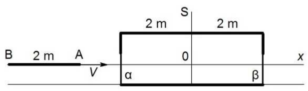
● Ένα σχετικιστικό παράδοξο - Το δωμάτιο και η ράβδος.

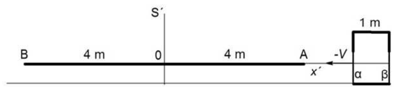


Ένα σχετικιστικό παράδοξο - Το δωμάτιο και η ράβδος.

Ένα δωμάτιο έχει μήκος ηρεμίας 4 m, κατά μήκος του άξονα των *x*. Μία ράβδος έχει μήκος ηρεμίας , κατά μήκος του άξονα των x . Το δωμάτιο έχει μια πόρτα σε κάθε άκρο (α και β), αρχικά κλειστές. Το κέντρο του δωματίου, Ο, είναι η αρχή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς S. Η ράβδος κινείται ως προς το S με ταχύτητα $V = 2,903 \times 10^8$ m/s κατά μήκος του άξονα των *x*, προς τα θετικά *x*. Έτσι, $\beta = V / c = 0,968$ και $\gamma = 4$.

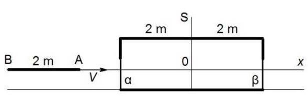


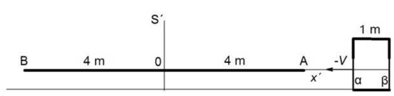




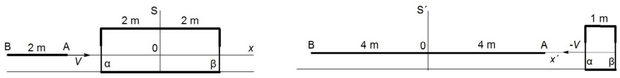
Στο σύστημα S, η ράβδος έχει, επομένως, μήκος ίσο με $L = L_0 / \gamma = 8\text{ m}/4 = 2\text{ m}$ και για να διανύσει μήκος 1 m απαιτείται χρόνος ίσος με $\tau = 1\text{ m} / V = 3,45\text{ ns}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το κέντρο της ράβδου συμπίπτει με το κέντρο του δωματίου. Στο σύστημα αναφοράς της ράβδου, S΄, το δωμάτιο κινείται με ταχύτητα $-V$, έχει μήκος $4\text{ m}/4 = 1\text{ m}$ και διανύει απόσταση 1 m σε χρόνο $\tau = 3,45\text{ ns}$.

Το σύστημα αναφοράς της ράβδου, S΄, έχει άξονες παράλληλους με αυτούς του S. Τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$ οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν. Επομένως, $x' = \gamma(x - Vt)$ και $t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right)$.

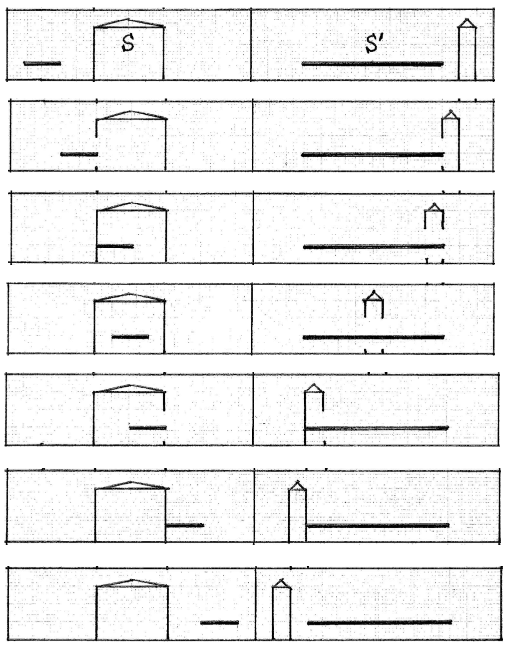




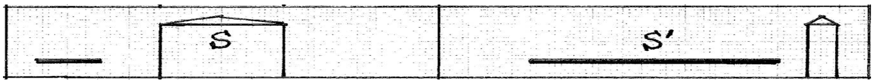
Βρίσκουμε τα x, t στο σύστημα S και τα αντίστοιχα x', t' στο σύστημα S΄ για τα ακόλουθα συμβάντα:



Σ υ μ β ά ν			**Σύστημα S (δωμάτιο)**		**Σύστημα S΄ (ράβδος)**	
			***x* (m)**	***t* (ns)**	***x΄* (m)**	***t΄* (ns)**
(α)	**Άκρο Α στην πόρτα α**	**Η πόρτα α ανοίγει**	-2	$-10{,}35$	$+4$	$-15{,}6$
(β)	**Άκρο Β στην πόρτα α**	**Η πόρτα α κλείνει**	-2	$-3{,}45$	-4	$+12$
(γ)	**Τα κέντρα των S και S΄ συμπίπτουν**		0	0	0	0
(δ)	**Άκρο Α στην πόρτα β**	**Η πόρτα β ανοίγει**	$+2$	$+3{,}45$	$+4$	-12
(ε)	**Άκρο Β στην πόρτα β**	**Η πόρτα β κλείνει**	$+2$	$+10{,}35$	-4	$+15{,}6$

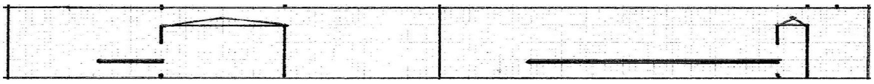


Κ. Χριστοδουλίδης: Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας



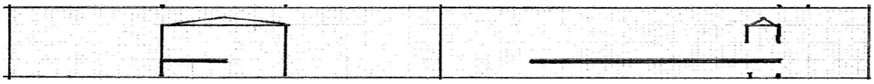
S 1

S´ 1



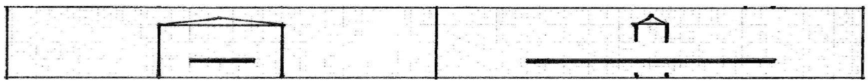
S 2 $t = -10,35$ ns
Άκρο Α στην πόρτα α. Η πόρτα α ανοίγει

S´ 2 $t' = -15,6$ ns
Άκρο Α στην πόρτα α. Η πόρτα α ανοίγει



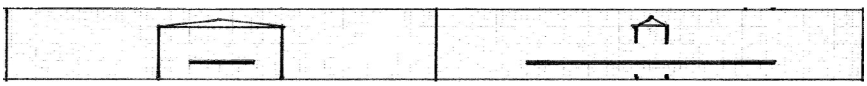
S 3 $t = -3,45$ ns
Άκρο Β στην πόρτα α. Η πόρτα α κλείνει

S´ 3 $t' = -12$ ns
Άκρο Α στην πόρτα β. Η πόρτα β ανοίγει



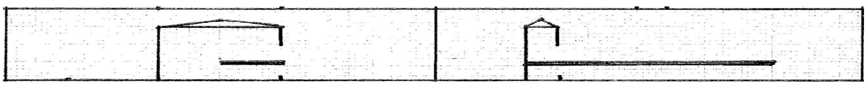
S 4 $t = 0$ Τα κέντρα
της ράβδου και του δωματίου συμπίπτουν

S´ 4 $t' = 0$ Τα κέντρα
της ράβδου και του δωματίου συμπίπτουν



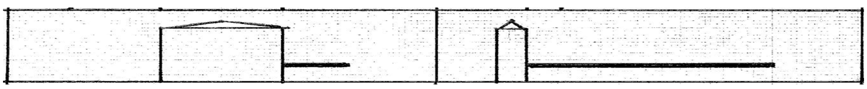
S 4 $t = 0$ Τα κέντρα
της ράβδου και του δωματίου συμπίπτουν

S´ 4 $t' = 0$ Τα κέντρα
της ράβδου και του δωματίου συμπίπτουν



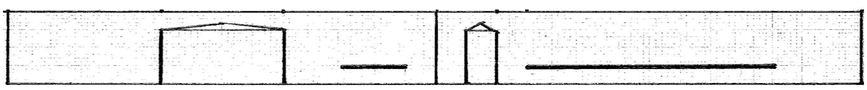
S 5 $t = +3,45$ ns
Άκρο Α στην πόρτα β. Η πόρτα β ανοίγει

S´ 5 $t' = +12$ ns
Άκρο Β στην πόρτα α. Η πόρτα α κλείνει



S 6 $t = +10,35$ ns
Άκρο Β στην πόρτα β. Η πόρτα β κλείνει

S´ 6 $t' = +15,6$ ns
Άκρο Β στην πόρτα β. Η πόρτα β κλείνει

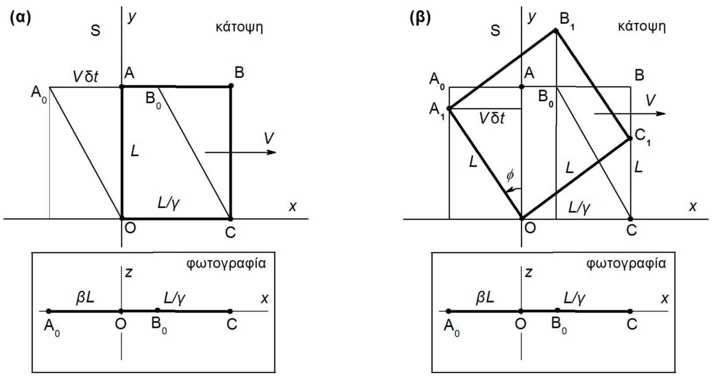


S 7

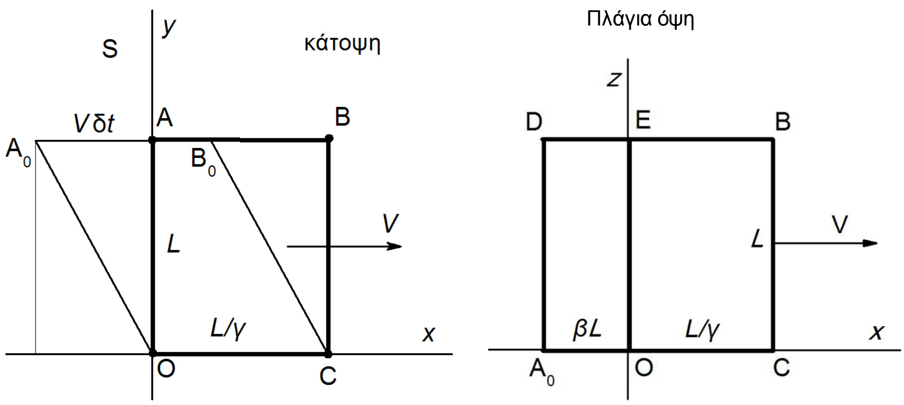
S´ 7

Η ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

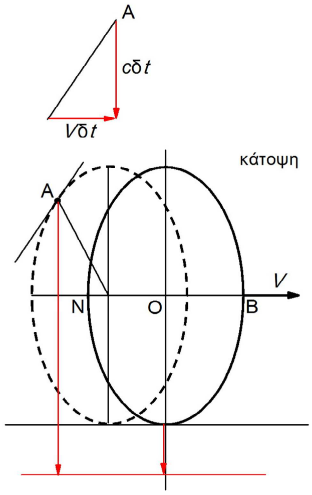
Τετράγωνο

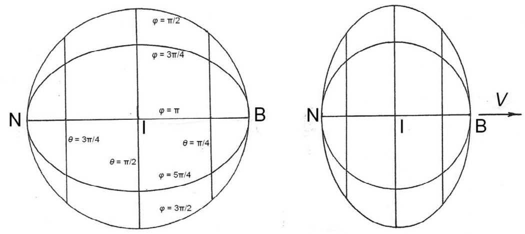


Κύβος

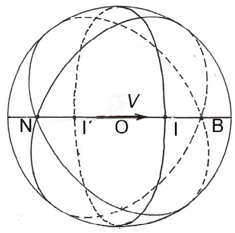


Σφαίρα

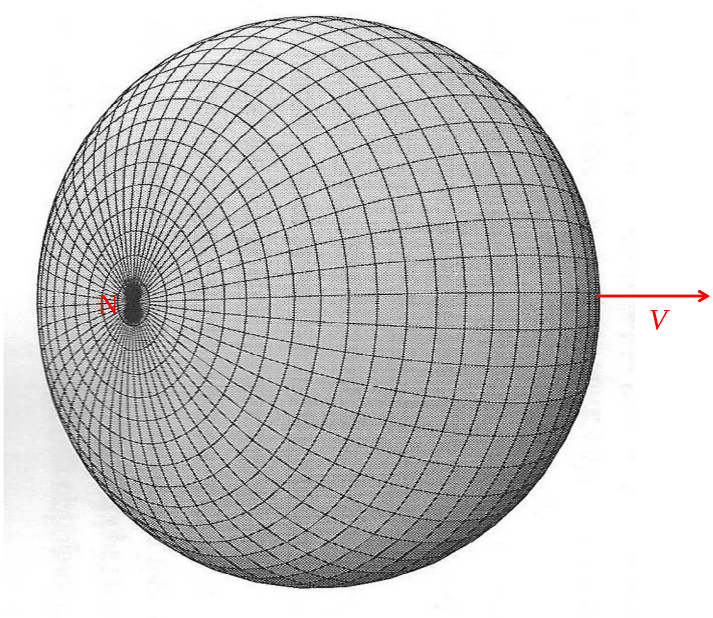




Ακίνητη σφαίρα **Κινούμενη σφαίρα**



Φωτογραφία της κινούμενης σφαίρας



Ασκηση 3.1

Δείξετε ότι, για ένα συμβάν, η ποσότητα $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ είναι αναλλοίωτη ως προς τον μετασχηματισμό του Lorentz (έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, με την προϋπόθεση ότι οι άξονές τους συμπίπτουν για $t = t' = 0$).

Στο σύστημα αναφοράς S είναι: $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. (1)

Στο σύστημα αναφοράς S΄ είναι: $s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$. (2)

Ο μετασχηματισμός του Lorentz δίνει:

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2) έχουμε:

$$s'^2 = c^2\gamma^2\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)^2 - \gamma^2(x - Vt)^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= \gamma^2\left(c^2t^2 - 2Vxt + \frac{V^2}{c^2}x^2 - x^2 + 2Vxt - V^2t^2\right) - y^2 - z^2$$

ή

$$s'^2 = \gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2\left(c^2 - V^2\right)t^2$$

Τελικά $s'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Δηλαδή είναι $s'^2 = s^2$ και η ποσότητα $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ είναι αναλλοίωτη ως προς τον μετασχηματισμό του Lorentz.

● Σε σχέση με ένα συμβάν, έστω το $(x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ t = 0)$, όλα τα άλλα συμβάντα κατατάσσονται αναλόγως του *τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης* $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Αν η απόσταση του κοσμικού σημείου ή συμβάντος (x, y, z, t) από το $(0, 0, 0, 0)$ είναι τέτοια ώστε να είναι $s^2 > 0$, το διάστημα ανάμεσα στα δύο σημεία ονομάζεται *χρονοειδές*. Για $s^2 < 0$, το διάστημα ανάμεσα στα δύο σημεία ονομάζεται *χωροειδές*. Τέλος για $s^2 = 0$ το διάστημα ανάμεσα στα δύο σημεία ονομάζεται *φωτοειδές* ή *μηδενικό διάστημα*. ●

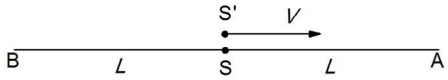
Άσκηση 3.7

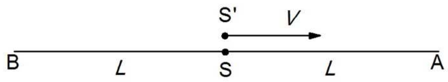
Παρατηρητής S είναι ακίνητος στο μέσο μιας ευθείας AB, η οποία έχει μήκος $2L$, όπως το μετράει αυτός. Ένας άλλος παρατηρητής, S΄ κινείται κατά μήκος της ευθείας AB με ταχύτητα $V = \frac{3}{5}c$ ως προς τον S. Και οι δύο βρίσκονται στην αρχή των αξόνων του αντίστοιχου συστήματός τους. Οι δύο παρατηρητές βρίσκονται στο ίδιο σημείο όταν τα ρολόγια και των δύο δείχνουν $t = t' = 0$.

(α) Πόσο είναι το μήκος της ευθείας AB όπως το μετρά ο S΄;

(β) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκπέμπονται ταυτόχρονα στο σύστημα S δύο παλμοί από τα σημεία A και B. Βρείτε τις θέσεις των σημείων A και B στο σύστημα S΄ όταν εκπέμπονται οι παλμοί, καθώς και τη χρονική στιγμή της εκπομπής του κάθε παλμού στο σύστημα S΄.

(γ) Σε ποιες χρονικές στιγμές, T_A και T_B, θα φθάσουν οι παλμοί στον S, και σε ποιες (T'_A και T'_B) θα φθάσουν στον S΄;





(α) Ο παρατηρητής S΄ βλέπει την ευθεία AB να κινείται με ταχύτητα $V = -\frac{3}{5}c$, στην οποία αντιστοιχεί παράγοντας Lorentz $\gamma = 5/4$. Το μήκος της ευθείας που θα μετρήσει θα είναι επομένως ίσο με $2L/\gamma = 1{,}6L$.

(β) Οι δύο παλμοί που εκπέμπονται στο σύστημα S ορίζονται ως τα εξής δύο συμβάντα:

Συμβάν A: Παλμός στο A, με συντεταγμένες $x_A = L, \quad t_A = 0$

Συμβάν B: Παλμός στο B, με συντεταγμένες $x_B = -L, \quad t_B = 0$

Τα αντίστοιχα συμβάντα έχουν στο σύστημα S΄ συντεταγμένες:

Συμβάν A: Παλμός στο A, με συντεταγμένες

$$x'_A = \gamma(x_A + Vt_A) = \frac{5}{4}\left(L + \frac{3}{5}c \times 0\right) = \frac{5}{4}L \qquad t'_A = \gamma\left(t_A + \frac{V}{c^2}x_A\right) = \frac{5}{4}\left(0 + \frac{3}{5c}L\right) = \frac{3}{4}\frac{L}{c}$$

Συμβάν B: Παλμός στο B, με συντεταγμένες

$$x'_B = \gamma(x_B + Vt_B) = \frac{5}{4}\left(-L + \frac{3}{5}c \times 0\right) = -\frac{5}{4}L \qquad t'_B = \gamma\left(t_B + \frac{V}{c^2}x_B\right) = \frac{5}{4}\left(0 + \frac{3}{5c}(-L)\right) = -\frac{3}{4}\frac{L}{c}$$

(γ) Οι χρόνοι, T_i, στους οποίους ο παλμοί φτάνουν στον καθένα παρατηρητή βρίσκεται αν προσθέσουμε στον χρόνο στον οποίο συνέβη ο παλμός στο σύστημά του, t_i, τον χρόνο, $|x_i|/c$, που απαιτεί-ται για να φτάσει το σήμα σε αυτόν: $T_i = t_i + |x_i|/c$ και $T'_i = t'_i + |x'_i|/c$. Επομένως

$$T_A = t_A + \frac{|x_A|}{c} = 0 + \frac{L}{c} = \frac{L}{c} \qquad T_B = t_B + \frac{|x_B|}{c} = 0 + \frac{|-L|}{c} = \frac{L}{c}$$

$$T'_A = t'_A + \frac{|x'_A|}{c} = \frac{3}{4}\frac{L}{c} + \frac{5}{4}\frac{L}{c} = 2\frac{L}{c} \qquad T'_B = t'_B + \frac{|x'_B|}{c} = -\frac{3}{4}\frac{L}{c} + \frac{5}{4}\frac{L}{c} = \frac{1}{2}\frac{L}{c}$$

Άσκηση 3.9

Με ποια ταχύτητα πρέπει να γίνει ένα ταξίδι σε ένα άστρο που απέχει 160 000 έτη φωτός, αν είναι να διαρκέσει 60 χρόνια για κάποιον που θα βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο;

Έστω ότι το διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα V ως προς τη Γη. Το ταξίδι θα διαρκέσει χρόνο $t = D/V$ για έναν παρατηρητή στη Γη, όπου D είναι η απόσταση Γης-άστρου. Για κάποιον μέσα στο διαστημόπλοιο, το ταξίδι θα διαρκέσει χρόνο $t' = D/V\gamma$. Έτσι,

$$ct' = \frac{D}{\beta\gamma}, \qquad \beta\gamma = \frac{D}{ct'} = \frac{160\,000}{60} = 2667, \qquad \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 2667^2,$$

$$\frac{1}{\beta^2} = 1 + \frac{1}{2667^2}, \qquad \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{2\times 2667^2}, \qquad \beta \approx 1 - \frac{1}{2\times 2667^2},$$

$$\beta = 1 - 7{,}03\times 10^{-8}, \qquad \beta = 0{,}999\,999\,93 .$$